Erster Teil der Grundlagen des Differentialkalküls, der vollständige Erklärung dieses Kalküls enthält *

Kapitel I
Über endliche Differenzen †

Leonhard Euler

§1 Aus den Dingen, die im oberen Buch über variable Größen und Funktionen dargelegt worden sind, ist es klar, je nachdem wie die variable Größe tatsächlich variiert wird, dass all ihre Funktionen eine Veränderung erfahren. So, wenn die variable Größe x den Zuwachs ω erhält, so dass für x $x+\omega$ geschrieben wird, werden alle Funktionen von x, von welcher Art xx, x^3, $\frac{a+x}{xx+aa}$ sind, andere Werte annehmen. Natürlich wird xx in $xx+2x\omega+\omega\omega$ übergehen, x^3 wird in $x^3+3xx\omega+3x\omega\omega+3x\omega\omega+\omega^3$ übergehen und $\frac{a+x}{aa+xx}$ wird in $\frac{a+x+\omega}{aa+xx+2x\omega+\omega\omega}$ verwandelt werden. Eine Veränderung von dieser Art wird immer entspringen, außer wenn die Funktion die Gattung der variablen Größe nur vorgibt, aber in Wirklichkeit eine konstante Größe ist, wie beispielsweise x^0; in diesem Fall bleibt eine solche Funktion unverändert, wie auch immer die Größe x verändert wird.

*Originaltitel: "Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, Partis Prioris", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 15-213", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

†Originaltitel: "Caput *I*. De differentiis finitis", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 15-39", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§2 Weil diese Dinge hinreichend klar dargelegt worden sind, wollen wir eher zu den Beschaffenheiten der Funktionen kommen, auf die die ganze Analysis des Unendlichen gestützt ist. Es sei also y irgendeine Funktion der variablen Größe x, für welche nacheinander in einer arithmetischen Progression fortschreitende Werte eingesetzt werden, natürlich x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, $x+4\omega$, etc., und es bezeichne y^I den Wert, den die Funktion y annimmt, wenn in ihr anstelle von x $x+\omega$ eingesetzt wird; auf die gleiche Weise sei y^{II} der Wert von y, wenn anstelle von x $x+2\omega$ geschrieben wird, und in gleicher Weise bezeichnen y^{III}, y^{IV}, y^V, etc. die Werte von y, die ans Licht treten, während anstelle von x $x+3\omega$, $x+4\omega$, $x+5\omega$, etc. gesetzt wird, so dass diese verschiedenen Werte von x und auf die folgende Weise einander entsprechen:

$$\begin{array}{llllllll} x, & x+\omega, & x+2\omega, & x+3\omega, & x+4\omega, & x+5\omega, & etc \\ y, & y^I, & y^{II}, & y^{III}, & y^{IV}, & y^V, & etc \end{array}$$

§3 Wie die arithmetische Progression x, $x+\omega$, $x+2\omega$, etc. ins Unendliche fortgesetzt werden kann, so wird die aus der Funktion y entspringende Reihe y, y^I, y^{II}, etc. auch bis ins Unendliche fortschreiten und ihre Natur wird von der Beschaffenheit der Funktion y abhängen. So, wenn $y=x$ oder $y=ax+b$ war, wird die Reihe y, y^I, y^{II}, etc. auch eine arithmetische sein; wenn $y=\frac{a}{bx+c}$ war, wird eine harmonische Reihe hervorgehen; wenn aber $y=a^x$ ist, wird man eine geometrische Reihe haben und es kann keine Reihe erdacht werden, die nicht auf diese Weise aus einer gewissen Funktion von y entspringen kann; eine Funktion von x von dieser Art pflegt in Hinblick auf die Reihe, die aus jener entspringt, ihr allgemeiner Term genannt zu werden; daher, weil jede nach einem gewissen Gesetz gebildete Reihe einen allgemeinen Term hat, entspringt sie umgekehrt aus einer gewissen Funktion von x, wie in der Lehre über Reihen genauer erklärt zu werden pflegt.

§4 Hier achten wir aber hauptsächlich auf Differenzen, um welche sich die Terme der Reihe y, y^I, y^{II}, y^{III}, etc. voneinander unterscheiden. Um diese an die Natur der Differentiale anzupassen, wollen wir sie mit den folgenden Zeichen anzeigen, dass gilt

$$y^I - y = \Delta y, \quad y^{II} - y^I = \Delta y^I, \quad y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II}, \quad \text{etc}$$

Es wird also Δy den Zuwachs ausdrücken, welchen die Funktion y erhält, wenn in ihr anstelle von x $x+\omega$ gesetzt wird, während ω irgendeine nach

Belieben angenommene Zahl bezeichnet. In der Lehre der Reihen pflegt freilich $\omega = 1$ angenommen zu werden; aber hier für unser Unternehmen ist es zuträglich, den allgemeinen Wert zu gebrauchen, der nach Belieben vermehrt oder vermindert werden kann. Es pflegt dieser Zuwachs Δy der Funktion y auch ihre Differenz genannt zu werden, um welche der folgende Wert y^I den ersten y übersteigt, und ununterbrochen als Zuwachs betrachtet wird, auch wenn er des Öfteren eine Abnahme darbietet, was aus seinem negativen Wert erkannt wird.

§5 Weil ja y^{II} aus y entspringt, wenn anstelle von x $x+2\omega$ geschrieben wird, ist es offenbar, dass dieselbe Größe entspringen wird, wenn zuerst für x $x+\omega$ festgelegt wird und dann erneut $x+\omega$ anstelle von x gesetzt wird. Daher wird y^{II} aus y^I entspringen, wenn in dieser anstelle von x $x+\omega$ geschrieben wird; und es wird daher Δy^I der Zuwachs von y^I sein, welchen es enthält, nachdem $x+\omega$ anstelle von x gesetzt worden ist; und so wird Δy^I auf die gleiche Weise die Differenz von y^I genannt. Auf die gleiche Weise wird weiter Δy^{II} die Differenz von y^{II} oder ihr Zuwachs sein, welchen es erhält, wenn anstelle von x $x+\omega$ gesetzt wird; und Δy^{III} wird die Differenz oder der Zuwachs von y^{III} sein und so weiter. Auf diese Weise wird aus der Reihe der Werte von y, die y, y^I, y^{II}, y^{III}, etc. sind, die Reihe der Differenzen Δy, Δy^I, Δy^{II}, etc. erhalten werden, die gefunden wird, wenn jeder beliebiger Term jener Reihe vom folgenden subtrahiert wird.

§6 Nachdem die Reihe der Differenzen gefunden worden ist, wenn aus ihr erneut die Differenzen genommen werden, indem jede beliebige von der folgenden subtrahiert wird, werden die Differenzen der Differenzen entspringen, die zweite Differenzen genannt werden und auf die Weise durch Charaktere überaus passend dargestellt werden, dass jeweils bedeutet

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta y &= \Delta y^I - \Delta y \\
\Delta\Delta y^I &= \Delta y^{II} - \Delta y^I \\
\Delta\Delta y^{II} &= \Delta y^{III} - \Delta y^{II} \\
\Delta\Delta y^{III} &= \Delta y^{IV} - \Delta y^{III} \\
&\mathit{etc}
\end{aligned}$$

Es wird deshalb $\Delta\Delta y$ die zweite Differenz von y genannt, $\Delta\Delta y^I$ die zweite Differenz von y^I und so weiter. Auf die gleiche Weise werden aber aus den zweiten Differenzen, wenn erneut deren Differenzen genommen werden, die dritten Differenzen hervorgehen, die auf diese Weise $\Delta^3 y$, $\Delta^3 y^I$, etc. zu schreiben sind, und daher weiter die vierten Differenzen $\Delta^4 y$, $\Delta^4 y^I$ etc. und so weiter, so weit es beliebt.

§7 Wir wollen diese einzelnen Reihen an Differenzen so in einem Schema darstellen, damit deren Zusammenhang leichter ins Auge fällt:

Arithmetische Progression

$$x, \quad x+\omega, \quad x+3\omega, \quad x+4\omega, \quad x+5\omega, \quad \text{etc}$$

Wert der Funktion

$$y, \quad y^I, \quad y^{II}, \quad y^{III}, \quad y^{IV}, \quad y^V, \quad \text{etc}$$

Erste Differenzen

$$\Delta y, \quad \Delta y^I, \quad \Delta y^{II}, \quad \Delta y^{III}, \quad \Delta y^{IV}, \quad \text{etc}$$

Zweite Differenzen

$$\Delta\Delta y, \quad \Delta\Delta y^I, \quad \Delta\Delta y^{II}, \quad \Delta\Delta y^{III}, \quad \text{etc}$$

Dritte Differenzen

$$\Delta^3 y, \quad \Delta^3 y^I, \quad \Delta^3 y^{II}, \quad \text{etc}$$

Vierte Differenzen

$$\Delta^4 y, \quad \Delta^4 y^I, \quad \text{etc}$$

Fünfte Differenzen

$$\Delta^5 y, \quad \text{etc}$$

etc.

von welchen jede beliebige aus der vorhergehenden entspringt, indem die jeweiligen Terme von den folgenden subtrahiert werden. Nachdem also irgendeine Funktion von x anstelle von y eingesetzt worden ist, weil ja die Werte y^I, y^{II}, y^{III}, etc. durch die bekannten Zusammensetzungen leicht gebildet werden, werden aus ihnen ohne Mühe die einzelnen Reihen der Differenzen gefunden werden.

§8 Wir wollen festlegen, dass $y = x$ ist und es wird $y^I = x^I = x + \omega$, $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$ und so weiter sein. Daher, indem die Differenzen genommen werden, wird $\Delta x = \omega$, $\Delta x^I = \omega$, $\Delta x^{II} = \omega$, etc. sein und daher werden die ersten Differenzen von x konstant sein und daher werden alle zweiten Differenzen verschwinden und in gleicher Weise die dritten Differenzen und alle der folgenden Ordnungen. Weil also $\Delta x = \omega$ ist, wird der Analogie wegen anstelle des Buchstabens ω dieser Charakter Δx angenehm verwendet werden. Also werden die Differenzen der variablen Größe x, deren aufeinander folgende Werte x, x^I, x^{II}, x^{III}, etc. eine arithmetische Progression festzulegen angenommen werden, Δx, Δx^I, Δx^{II}, etc. konstant und einander gleich sein; und deshalb wird $\Delta\Delta x = 0$, $\Delta^3 x = 0$, $\Delta^4 x = 0$ sein und so weiter.

§9 Für die Werte von x, die selbigem nacheinander zugeteilt werden, haben wir hier eine arithmetische Progression angenommen, so dass die ersten Differenzen dieser Werte konstant sind, die zweiten und alle übrigen verschwinden. Auch wenn dies von unserem Belieben abhängt, weil wir irgendeine andere Progression gleichermaßen hätten verwenden können, pflegt dennoch die arithmetische Progression in Bezug auf alle übrigen am angenehmsten gebraucht zu werden, sowohl weil sie die einfachste und am leichtesten verständliche ist, als auch in der Tat besonders, weil sie sich auf ganz und gar alle Werte, welche x freilich annehmen kann, erstreckt. Indem nämlich ω so negative wie positive Werte zugeteilt werden, sind in dieser Reihe von Werten von x ganz und gar alle reellen Größen enthalten, die anstelle von x eingesetzt werden können; andernfalls aber, wenn wir geometrische Progression gewählt hätten, wäre der Zugang zu negativen Werten nicht eröffnet worden. Dieses Grundes wegen wird die Veränderlichheit von Funktionen y aus eine arithmetische Progression festlegenden Werten sehr bequem beurteilt.

§10 Wie $\Delta y = y^I - y$ ist, so können die höheren Differenzen auch aus den Termen der ersten Reihe y, y^I, y^{II}, y^{III}, etc. definiert werden. Weil nämlich gilt

$$\Delta y^I = y^{II} - y^I,$$

wird auch gelten

$$\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^I + y \quad \text{und} \quad \Delta\Delta y^I = y^{III} - 2y^{II} + y^I$$

und daher

$$\Delta^3 y = \Delta\Delta y^I - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y;$$

auf die gleiche Weise wird gelten

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y \quad \text{und} \quad \Delta^5 y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y,$$

die numerischen Koeffizienten welcher Formeln demselben Gesetz folgen, welches in den Potenzen eines Binoms beobachtet wird. So wie aber die erste Differenz aus zwei Termen der Reihe y,y^I,y^{II},y^{III}, etc. bestimmt wird, so wird die zweite Differenz aus drei bestimmt, die dritte aus vier und so über die übrigen. Nachdem aber die Differenzen einer Ordnung von y erkannt worden sind, werden auf die gleiche Weise die Differenzen aller Ordnungen von y^I, y^{II}, etc. definiert werden.

§11 Nachdem also irgendeine Funktion y vorgelegt worden ist, werden so ihre ersten wie folgenden Differenzen, welche freilich der Differenz ω, nach welcher die Werte von x fortschreiten, entsprechen, gefunden werden können. Und in der Tat ist es dafür nicht von Nöten, dass die Reihe der Werte von y weiter fortgesetzt wird; wie nämlich die erste Differenz Δy gefunden wird, wenn in y anstelle von $x + \omega$ geschrieben wird und vom entspringenden Wert y^I die Funktion y selbst subtrahiert wird, so wird die zweite Differenz $\Delta\Delta y$ erhalten werden, dass Δy^I entspringt, und Δy von Δy^I subtrahiert wird. Wenn auf die gleiche Weise die Differenz der zweiten Differenz $\Delta\Delta y$ genommen wird, indem sie vom Wert subtrahiert wird, welchen sie annimmt, wenn anstelle von x $x + \omega$ gesetzt wird, wird die dritte Differenz $\Delta^3 y$ hervorgehen und daher weiter auf dieselbe Weise die vierte Differenz $\Delta^4 y$ etc. Solange also jemand die erste Differenz einer Funktion ausfindig zu machen weiß, wird er zugleich die zweite Differenz, die dritte und alle folgenden finden können, deshalb weil die zweite Differenz von y nichts anderes ist als die erste Differenz von Δy und die dritte Differenz nichts anderes außer der ersten Differenz $\Delta\Delta y$ und so weiter über die übrigen.

§12 Wenn die Funktion y aus zwei oder mehreren Teilen zusammengesetzt war, dass $y = p + q + r + \text{etc}$ ist, dann, weil $y^I = p^I + q^I + r^I + \text{etc}$ ist, wird die Differenz diese sein

$$\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \text{etc}$$

und auf die gleiche Weise weiter

$$\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r + \text{etc},$$

woher das Finden der Differenzen, wenn die vorgelegte Funktion aus Teilen zusammengesetzt war, nicht unwesentlich erleichtert wird. Wenn daher aber die Funktion y ein Produkt aus den zwei Funktionen p und q, natürlich $y = pq$ war, weil $y^I = p^I q^I$ sein wird und auch

$$p^I = p + \Delta p \quad \text{und} \quad q^I = q + \Delta q,$$

wird werden

$$p^I q^I = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q.$$

Daher, wenn p eine konstante Größe $= a$ ist, wird wegen $\Delta a = 0$ die erste Differenz der Funktion $y = aq$ $\Delta y = a\Delta q$ sein und auf die gleiche Weise die zweite Differenz $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, die dritte $\Delta^3 y = a\Delta^3 q$ und so weiter.

§13 Weil ja jede ganz rationale Funktion ein Aggregat aus einigen Potenzen von x ist, werden wir alle Differenzen von ganz rationalen Funktionen finden können, wenn wir nur die Differenzen von Potenzen darzubieten wissen. Dieser Sache wegen wollen wir die Differenzen der einzelnen Potenzen der variablen Größe x in den folgenden Beispielen ausfindig machen.
Weil aber $x^0 = 1$ ist, wird $\Delta x^0 = 0$ sein, deshalb weil x^0 nicht variiert wird, auch wenn x in $x + \omega$ übergeht. Dann haben wir aber gesehen, dass $\Delta x = \omega$ und $\Delta\Delta x = 0$ ist und zugleich verschwinden die Differenzen der folgenden Ordnungen. Weil diese Dinge offenbar sind, wollen wir von der zweiten Potenz aus beginnen.

Beispiel 1

Die Differenzen aller Ordnung der Potenz x^2 zu finden.

Weil hier $y = x^2$ ist, wird $y^I = (x + \omega)^2$ sein und daher

$$\Delta y = 2\omega x + \omega\omega,$$

welches die erste Differenz ist. Nun wird wegen der konstanten Differenz ω $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$ und $\Delta^3 = 0$, $\Delta^4 y = 0$, etc. sein

Beispiel 2

Die Differenzen aller Ordnungen der Potenz x^3 zu finden.

Es werde $y = x^3$ gesetzt, und weil $y^I = (x+\omega)^3$ ist, wird gelten

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3,$$

welches die erste Differenz ist. Darauf wird wegen $\Delta xx = 2\omega x + \omega\omega$ sein

$$\Delta 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3 \quad \text{und} \quad \Delta 3\omega^2 x = 3\omega^2 \quad \text{und} \quad \Delta\omega^3 = 0;$$

nach Sammeln von diesen wird gelten

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3 \quad \text{und} \quad \Delta^3 y = 6\omega^3.$$

Die folgenden Differenzen werden hingegen verschwinden.

BEISPIEL 3

Die Differenzen aller Ordnungen der Potenz x^4 zu finden.

Nach Setzen von $y = x^4$ wird wegen $y^I = (x+\omega)^4$ sein

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4,$$

welches die erste Differenz ist. Dann ist aus dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}
\Delta 4\omega x^3 &= 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4 \\
\Delta 6\omega^2 x^2 &= \phantom{12\omega^2 x^2 +{}} 12\omega^3 x + 6\omega^4 \\
\Delta 4\omega^3 x &= \phantom{12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x +{}} 4\omega^4 \\
\Delta\omega^4 &= \phantom{12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x +{}} 0
\end{aligned}$$

Durch Sammeln von diesen wird die zweite Differenz diese sein

$$\Delta\Delta y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^3.$$

Weil darauf weiter ist

$$\begin{aligned}
\Delta 12\omega^2 x^2 &= 24\omega^3 x + 12\omega^4 \\
\Delta 24\omega^3 x &= \phantom{24\omega^3 x +{}} 24\omega^4 \\
\Delta 14\omega^4 &= \phantom{24\omega^3 x +{}} 0,
\end{aligned}$$

wird die dritte Differenz hervorgehen

$$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$$

und schließlich die vierte Differenz

$$\Delta^4 y = 24\omega^4;$$

weil diese konstant ist, werden die Differenzen der folgenden Ordnungen verschwinden

Beispiel 4

Die Differenzen jeder Ordnung der Potenz x^4 zu finden.

Es werde $y = x^n$ gesetzt, und weil $y^I = (x+\omega)^n$, $y^{II} = (x+2\omega)^n$, $y^{III} = (x+3\omega)^n$, etc. ist, werden die Potenzen entwickelt geben

$$\begin{aligned}
y &= x^n \\
y^I &= x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3 x^{n-3} + \text{ etc} \\
y^I &= x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3 x^{n-3} + \text{ etc} \\
y^{II} &= x^n + \frac{n}{1}2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}8\omega^3 x^{n-3} + \text{ etc} \\
y^{III} &= x^n + \frac{n}{1}3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}27\omega^3 x^{n-3} + \text{etc} \\
y^{IV} &= x^n + \frac{n}{1}4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}64\omega^3 x^{n-3} + \text{etc}
\end{aligned}$$

Daher wird durch Nehmen der zweiten Differenzen hervorgehen

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3 x^{n-3} + \text{ etc} \\
\Delta y^I &= \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}7\omega^3 x^{n-3} + \text{ etc} \\
\Delta y^{II} &= \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}19\omega^3 x^{n-3} + \text{etc} \\
\Delta y^{III} &= \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}37\omega^3 x^{n-3} + \text{etc}
\end{aligned}$$

Es werden erneut Differenzen genommen und es wird erhalten werden

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta y &= n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}14\omega^4 x^{n-4} + \text{ etc} \\
\Delta\Delta y^I &= n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}50\omega^4 x^{n-4} + \text{ etc} \\
\Delta\Delta y^{II} &= n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}18\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}110\omega^4 x^{n-4} + \text{etc}
\end{aligned}$$

Aus diesen wird durch Subtraktion weiter gefunden

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 36\omega^4 x^{n-4} + \text{etc}$$
$$\Delta^3 y^I = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 60\omega^4 x^{n-4} + \text{etc}$$

und weiter

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \text{ etc}$$

§14 Um das Bildungsgesetz, nach welchem diese Differenzen der Potenz x^4 fortschreiten, leichter zu erkennen, wollen wir der Kürze wegen zuerst festlegen

$$\begin{aligned} A &= \frac{n}{1} \\ B &= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \\ C &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ D &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \\ E &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

Darauf werde die folgende Tabelle angelegt, die für die einzelnen Differenzen dienen wird

y	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	etc.
Δy	0,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	etc.
$\Delta^2 y$	0,	0,	2,	6,	14,	30,	62,	126,	254,	etc.
$\Delta^3 y$	0,	0,	0,	6,	36,	150,	540,	1806,	5796,	etc.
$\Delta^4 y$	0,	0,	0,	0,	24,	240,	1560,	8400,	40824,	etc.
$\Delta^5 y$	0,	0,	0,	0,	0,	120,	1800,	16800,	126000,	etc.
$\Delta^6 y$	0,	0,	0,	0,	0,	0,	720,	15120,	191520,	etc.
$\Delta^7 y$	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	5040,	141120,	etc.

In dieser Tabelle wird die Zahl einer Reihe gefunden, wenn die vorhergehende derselben Reihe zu darüber stehenden addiert wird und die Summe mit dem vorangestellten Index des Charakters multipliziert wird. So wird in der Differenz $\Delta^5 y$ entsprechenden Reihe der Term 16800 gefunden, wenn der vorhergehende 1800 zum darüber geschriebenen 1560 addiert wird und die Summe 3360 mit 5 multipliziert wird.

§15 Nachdem also diese Tabelle angelegt worden ist, werden sich die einzelnen Differenzen der Potenz $x^n = y$ auf die folgende Weise verhalten:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= A\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \text{etc}\\
\Delta^2 y &= 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \text{etc}\\
\Delta^3 y &= 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \text{etc}\\
\Delta^4 y &= 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \text{etc}
\end{aligned}$$

Allgemein wird aber die Differenz der Ordnung m der Potenz x^n, oder $\Delta^m y$, auf die folgende Weise ausgedrückt werden.
Es sei

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m},$$

$$K = \frac{m-n}{m+1}I\ ,\ L = \frac{n-m-1}{m+2}K\ ,\ M = \frac{n-m-2}{m+3}L\ ,\ \text{etc}$$

Des Weiteren sei aber

$$\begin{aligned}
\alpha &= (m+1)^m - \frac{m}{1}m^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^m + \text{ etc}\\
\beta &= (m+1)^{m+1} - \frac{m}{1}m^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^{m+1} + \text{ etc}\\
\gamma &= (m+1)^{m+2} - \frac{m}{1}m^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^{m+2} + \text{ etc}\\
&\text{etc;}
\end{aligned}$$

nach Finden dieser Werte wird sein

$$\Delta^m y = \alpha I\omega^m x^{n-m} + \beta K\omega^{m+1}x^{n-m-1} + \gamma L\omega^{m+2}x^{n-m-2} + \text{ etc;}$$

die Beschaffenheit dieses Ausdrucks folgt aus der Art, auf die die einzelnen Differenzen aus den Werten y, y^I, y^{II}, y^{III}, etc. gefunden, von selbst.

§16 Aus diesen Dingen ist es klar, wenn der Exponent n eine ganze positive Zahl war, dass schließlich zu konstanten Differenzen gelangt wird und alle hö heren als diese $= 0$ sind. So wird sein

$$\begin{aligned} \Delta x &= \omega \\ \Delta^2 x^2 &= 2\omega^2 \\ \Delta^3 x^3 &= 6\omega^3 \\ \Delta^4 x^4 &= 24\omega^4 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\Delta^n x^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot \omega^n$$

Jede ganz rationale Funktion wird also schließlich zu konstanten Differenzen geführt werden. Natrürlich hat eine Funktion von x ersten Grades $ax + b$ schon eine konstante erste Differenz $= a\omega$. Eine Funktion zweiten Grades $axx + bx + c$ wird eine konstante zweite Differenz $= 2a\omega\omega$ haben. Von einer Funktion dritten Grades wird die dritte Differenz konstant sein, von einer vierten Grades die vierte und so weiter.

§17 Aber die Methode, mit der wir die Differenzen der Potenz x^n gefunden haben, erstreckt sich auch weiter und wird auch auf Potenzen, deren Exponent n eine negative oder gebrochene oder sogar irrationale Zahl ist, ausgedehnt. Damit dies klarer wird, werden wir nur die ersten Differenzen der wesentlichen Potenzen von dieser Art darbieten, weil ja das Bildungsgesetz der zweiten und der folgenden Differenzen nicht so leicht erkannt wird, es wird also sein

$$\begin{aligned} \Delta x &= \omega \\ \Delta x^2 &= 2\omega x + \omega^2 \\ \Delta x^3 &= 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3 \\ \Delta x^4 &= 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise wird aber sein

$$\begin{aligned}
\Delta x^{-1} &= -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \text{ etc}\\
\Delta x^{-2} &= -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \text{ etc}\\
\Delta x^{-3} &= -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \text{ etc}\\
\Delta x^{-4} &= -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \text{ etc}
\end{aligned}$$

und von da aus für die übrigen. In gleicher Weise wird sein

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\frac{1}{2}} &= \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \text{ etc}\\
\Delta x^{\frac{1}{3}} &= \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} - \text{ etc}\\
\Delta x^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \text{ etc}\\
\Delta x^{-\frac{1}{3}} &= -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \text{ etc}
\end{aligned}$$

§18 Es ist deshalb klar, dass diese Differenzen, wenn der Exponent von x keine ganze positive Zahl war, ins Unendliche fortschreiten oder aus einer unendlichen Anzahl an Termen bestehen. Dennoch können indes dieselben Differenzen auch durch einen endlichen Ausdruck dargeboten werden. Weil nämlich nach Setzen von $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $y^I = \frac{1}{x+\omega}$ ist, wird sein

$$\Delta x^{-1} = \Delta \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x};$$

daher, wenn der Bruch $\frac{1}{x+\omega}$ in eine Reihe umgewandelt wird, geht der obere Ausdruck hervor. Auf die gleiche Weise wird sein

$$\Delta x^{-2} = \Delta \cdot \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx}$$

und für die Irrationalitäten wird sein

$$\Delta\sqrt{x} = \sqrt{x+\omega} - \sqrt{x} \quad \text{und} \quad \Delta\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\omega}} - \frac{1}{\sqrt{x}};$$

welche Formeln, wenn sie auf gewohnte Weise als Reihen erklärt werden, die oberen Ausdrücke liefern.

§19 Auf diese Weise können in der Tat auch die Differenzen entweder gebrochener oder irrationaler Funktionen gefunden werden; so, wenn die erste Differenz des Bruches $\frac{1}{aa+xx}$ gesucht wird, werde $y = \frac{1}{aa+xx}$ gesetzt, und weil $y^I = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2}$ ist, wird sein

$$\Delta y = \Delta \frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} - \frac{1}{aa+xx},$$

welcher Ausdruck auch in eine unendliche Reihe umgewandelt werden kann. Es werde $aa + xx = P$ und $2\omega x + xx = Q$ gesetzt; es wird gelten

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{ etc}$$

und

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{ etc}$$

Nachdem also wieder anstelle von P und Q die Werte eingesetzt worden sind, wird sein

$$\Delta y = \Delta \frac{1}{aa+xx}$$

$$= -\frac{2\omega x+\omega\omega}{(aa+xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx+4\omega^3 x+\omega^4}{(aa+xx)^3} - \frac{8\omega^3 x^3+12\omega^4 x^2+6\omega^5 x+\omega^6}{(aa+xx)^4} + \text{ etc};$$

wenn diese Terme nach Potenzen von ω geordnet werden, wird sein

$$\Delta \cdot \frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2} + \frac{\omega^2(3xx-aa)}{(aa+xx)^3} - \frac{4\omega^3(x^3-aax)}{(aa+xx)^4} + \text{ etc}$$

§20 Mit ähnlichnen unendlichen Reihen können auch die Differenzen irrationaler Funktionen ausgedrückt werden.
Es sei diese Funktion $y = \sqrt{aa+xx}$ vorgelegt; und weil gilt

$$y^I = \sqrt{aa+xx+2\omega x+\omega\omega},$$

werde festgelegt

$$aa + xx = P \quad \text{und} \quad 2\omega x + \omega\omega = Q;$$

es wird sein

$$\Delta y = \sqrt{P+Q} - \sqrt{P} = \frac{Q}{2\sqrt{P}} - \frac{QQ}{8P\sqrt{P}} + \frac{Q^3}{16P^2\sqrt{P}} - \text{ etc},$$

woher werden wird

$$\Delta y = \Delta\sqrt{aa+xx} = \frac{2\omega x + \omega\omega}{2\sqrt{aa+xx}} - \frac{4\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4}{8(aa+xx)\sqrt{aa+xx}} + \text{ etc}$$

oder

$$= \frac{\omega x}{\sqrt{aa+xx}} + \frac{aa\omega^3}{2(aa+xx)\sqrt{aa+xx}} - \frac{aa\omega^3 x}{2(aa+xx)^2\sqrt{aa+xx}} + \text{ etc}$$

und daher erschließen wir also, dass die Differenz irgendeiner Funktion von x, die y sei, in dieser Form ausgedrückt werden kann, dass ist

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ etc,}$$

während P,Q,R,S etc gewisse Funktionen von x sind, die in jedem Fall aus der Funktion y bestimmt werden können.

§21 Und auch die Differenzen von transzendenten Funktionen werden aus dieser Form nicht ausgeschlossen, was aus den folgenden Beispielen klar werden wird.

Beispiel 1

Die erste Differenz des hyperbolischen Logarithmus von x zu finden

Es werde $y = \ln(x)$ gesetzt, und weil $y^I = \ln(x+\omega)$ ist, wird sein

$$\Delta y = y^I - y = \ln(x+\omega) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{\omega}{x}\right).$$

Einen Logarithmus von dieser Art haben wird aber oben gelernt, durch eine unendliche Reihe auszudrücken; unter Verwendung von dieser wird sein

$$\Delta y = \Delta\ln(x) = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2xx} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{ etc}$$

Beispiel 2

Die erste Differenz der exponentiellen Größe a^x zu finden.

Nach Setzen von $y = a^x$ wird $y^I = a^{x+\omega} = a^x \cdot a^\omega$ sein; aber oben haben wir gezeigt, dass gilt

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega \ln(a)}{1} + \frac{\omega^2 \ln^2(a)}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 \ln^3(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ etc;}$$

nach Einführen dieses Wertes wird sein

$$\Delta a^x = y^I - y = \Delta y = \frac{a^x \omega \ln(a)}{1} + \frac{a^x \omega^2 \ln^2(a)}{1 \cdot 2} + \frac{a^x \omega^3 \ln^3(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ etc}$$

Beispiel 3

Im Kreis, dessen Radius $= 1$ ist, die Differenz des Sinus des Bogens x zu finden

Es sei $\sin(x) = y$; es wird $y^I = \sin(x + \omega)$ sein, woher wird

$$\Delta y = y^I - y = \sin(x + \omega) - \sin(x)$$

Aber es ist $\sin(x + \omega) = \cos(\omega) \cdot \sin(x) + \sin(\omega) \cdot \cos(x)$ und durch unendliche Reihen haben wir gezeigt, dass gilt

$$\cos(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\omega^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{ etc}$$

und

$$\sin(\omega) = \omega - \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\omega^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ etc;}$$

nach Einsetzen dieser Reihen wird sein

$$\Delta \sin(x) = \omega \cos(x) - \frac{\omega^2}{2} \sin(x) - \frac{\omega^3}{6} \cos(x) + \frac{\omega^4}{24} \sin(x) + \frac{\omega^5}{120} \cos(x) + \text{ etc.}$$

Beispiel 4

Im Kreis, dessen Radius $= 1$ ist, die Differenz der Kosinus des Bogens x zu finden

Nach Setzen von $y = \cos(x)$ wird wegen $y^I = \cos(\omega) \cdot \cos(x) - \sin(\omega) \cdot \sin(x)$ sein und daher

$$\Delta y = \cos(\omega) \cdot \cos(x) - \sin(\omega) \cdot \sin(x) - \cos(x)$$

Unter Verwendung der zuvor dargelegten Reihen wird also hervorgehen

$$\Delta \cos(x)) - \omega \sin(x) - \frac{\omega^2}{2} \cos(x) + \frac{\omega^3}{6} \sin(x) + \frac{\omega^4}{24} \cos(x) - \frac{\omega^5}{120} \sin(x) - \text{ etc}$$

§22 Weil also nach Vorlegen irgendeiner entweder algebraischen oder transzendenten Funktion von x, die y sei, ihre erste Differenz eine Form solcher Art hat, dass gilt

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ etc},$$

wenn von dieser erneut die Differenz genommen wird, wird es klar zutage treten, dass die zweite Differenz von y eine Form von dieser Art haben wird

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \text{ etc}$$

und auf die gleiche Weise wird die dritte Differenz von y von dieser Art sein

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \text{ etc}$$

Dort ist es anzumerken, dass die Buchstaben P, Q, R, etc. hier nicht für bestimmte Werte verwendet werden und dadurch nicht mit demselben Buchstaben in den diversen Differenzen dieselbe Funktion von x bezeichnet wird; und ich gebrauche hier daher dieselben Buchstaben, damit es nicht an einer genügenden Anzahl an verschiedenen Buchstaben mangelt. Im Übrigen sind sich die Formen dieser Differenzen sittsam einzuprägen, weil sie in der Analysis des Unendlichen größten Nutzen haben.

§23 Nachdem ich also die Art und Weise dargelegt habe, auf welche die erste Differenz einer jeden Funktion und aus ihr weiter die Differenzen der folgenden Ordnungen gefunden werden können, die natürlich aus den aufeinander folgenden Werten der Funktion y, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, etc. aufgefunden werden, werden umgekehrt aus den gegebenen Differenzen von y jeder Ordnung die variablen Werte von y selbst gefunden werden können. Es wird nämlich sein

$$\begin{aligned}
y^{I} &= y + \Delta y \\
y^{II} &= y + 2\Delta y + \Delta\Delta y \\
y^{III} &= y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y \\
y^{IV} &= y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta y \\
&\text{etc},
\end{aligned}$$

wo die numerischen Koeffizienten wieder aus der Entwicklung des Binoms entsprießen. Wie also y, y^{II}, y^{III}, etc. die Werte von y sind, die entspringen, wenn anstelle von x nacheinander diese Werte $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, etc.

gesetzt werden, werden wir sofort den Wert von $y^{(n)}$ angeben können, der hervorgeht, wenn anstelle von x $x + n\omega$ geschrieben wird; dieser Wert wird natürlich sein

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y + \text{ etc}$$

und daher können sogar auch die Werte von x verschafft werden, wenn n eine negative Zahl war. So, wenn anstelle von x $x - \omega$ gesetzt wird, wird die Funktion y in diese Form übergehen

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \text{ etc;}$$

wenn aber anstelle von x $x - 2\omega$ gesetzt wird, wird die Funktion y in diese übergehen

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \text{ etc}$$

§24 Wir wollen noch ein wenig über die inverse Methode hinzufügen, mit welcher, wenn die Differenz gegeben ist, aus ihr selbst jene Funktion, deren Differenz sie ist, ausfindig gemacht werden muss. Weil aber dies sehr schwierig ist und oftmals die Analysis des Unendlichen selbst erfordert, wollen wir nur gewisse leichtere Fälle entwickeln. Zuerst wird also durch Rückwärtsgehen, wenn wir die Differenz einer gewissen Funktion gefunden haben, umgekehrt nach Vorlegen dieser Differenz jene Funktion selbst, woher sie entstanden ist, dargeboten werden können. So, weil die Differenz der Funktion $ax + b$ $a\omega$ ist, wenn gesucht wird, die Differenz welcher Funktion $a\omega$ ist, wird die Antwort leicht sein, dass die Funktion $ax + b$ ist. In dieser wird also die konstante Größe b aufgefunden, die in der Differenz nicht enthalten war und die deshalb von unserem Belieben ahhänig sein wird. Immer aber, wenn die Differenz einer gewissen Funktion P Q war, wird auch die Differenz der Funktion $P + A$ (während A irgendeine konstante Größe bezeichnet) Q sein. Daher, wenn diese Differenz Q vorgelegt wird, wird die Funktion, aus welcher sie entsprungen ist, $P + Q$ sein und hat deshalb keinen bestimmten Wert, weil die Konstante A von unserem Belieben abhängt.

§25 Wir wollen die gesuchte Funktion, deren Differenz vorgelegt wird, die Summe nennen; dieser Name wird angenehm verwendet, sowohl, weil die Summe der Differenz entgegengestellt zu werden pflegt, als auch, weil die gesuchte Funktion tatsächlich die Summe der Differenz aller vorhergehenden Werte ist. So wie nämlich ist

$$y^{I} = y + \Delta y \quad \text{und} \quad y^{II} = y + \Delta y + \Delta y^{I},$$

wenn die Werte von y rückwärts fortgesetzt werden, so dass der, der dem Wert $x - \omega$ entspricht, y_I geschrieben wird und der diesem vorhergehende y_{II} und die noch weiter vorhergehen y_{III}, y_{IV}, y_V, etc und daraus die rückwärtige Reihe in mit ihren Differenzen gebildet wird

$$y_V, y_{IV}, y_{III}, y_{II}, y_I, y \quad \text{und} \quad \Delta y_V, \Delta y_{IV}, \Delta y_{III}, \Delta y_{II}, \Delta y_I, \Delta y$$

wird $y = \Delta y_I + y_I$ sein und wegen $y = \Delta y_I + y_{II}$ und weiter $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$ wird natürlich sein

$$y = \Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_V + \text{ etc}$$

und so wird die Funktion y, deren Differenz Δy ist, die Summe aller vorausgehenden Werte der Differenz Δy sein, die entstehen, wenn anstelle von x die vorausgehenden Werte $x - \omega$, $x - 2\omega$, $x - 3\omega$, etc. geschrieben werden.

§26 Wie wir, um die Differenz zu bezeichnen, das Zeichen Δ gebraucht haben, so werden wir die Summe mit dem Zeichen Σ anzeigen; natürlich, wenn die Differenz der Funktion y z war, wird $z = \Delta y$ sein; daher, wenn y gegeben ist, die Differenz z zu finden, haben wir zuvor gelehrt. Wenn daher aber die Differenz z gegeben gewesen ist und ihre Summe y aufgefunden werden muss, wird $y = \Sigma z$ werden und daher wird aus der Gleichung $z = \Delta y$ durch Rückwärtsgehen diese Gleichung $y = \Sigma z$ gebildet werden, wo irgendeine Konstante wegen der oben gegebenen Gründe hinzugeführt werden können wird; daher wird die Gleichung $z = \Delta y$, wenn sie invertiert wird, auch $y = \Sigma z + C$ geben. Des Weiteren, weil die Differenz der Größe ay $a\Delta y = az$ ist, wird $\Sigma az = ay$ sein, wenn freilich a eine konstante Größe ist. Weil also $\Delta x = \omega$ ist, wird $\Sigma w = x + C$ und $\Sigma a\omega = ax + C$ sein und wegen der konstanten Größe ω wird $\Sigma\omega^2 = \omega x + C$ sein, $\Sigma\omega^3 = \omega^2 + C$ und so weiter.

§27 Wenn wir also die oben gefundenen Differenzen der Potenzen von x invertieren, wird sein

$$\Sigma\omega = x \quad \text{und daher} \quad \Sigma 1 = \frac{x}{\omega}$$

Des Weiteren haben wir

$$\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2;$$

daher wird

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma\frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Weiter ist

$$\Sigma(2\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

oder

$$3\omega\Sigma x^2 + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3\Sigma 1 = x^3;$$

also

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega\Sigma x - \frac{\omega^3}{3}\Sigma 1$$

oder

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}.$$

Auf die gleiche Weise wird sein

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2}\Sigma x^2 - \omega^2\Sigma x - \frac{\omega^3}{4}\Sigma 1,$$

wo, wenn anstelle von Σx^2, Σx und $\Sigma 1$ die zuvor gefundenen Werte eingesetzt werden, aufgefunden werden wird

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Des Weiteren, weil gilt

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega\Sigma x^3 - 2\omega^2\Sigma x^2 - \omega^3\Sigma x - \frac{\omega^4}{5}\Sigma 1,$$

wird unter Verwendung der Substitutionen sein

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x.$$

Indem auf die gleiche Weise weiter fortgeschritten wird, wird aufgefunden werden

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}\omega x^4 - \frac{1}{12}\omega^3 x^2$$

und

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}\omega x^5 - \frac{1}{6}\omega^3 x^3 + \frac{1}{42}\omega^5 x,$$

welche Ausdrücke wir unten leichter zu finden lehren werden.

§28 Wenn also irgendeine ganz rationale Funktion von x vorgelegt war, wird ihre Summe (oder die Funktion, deren Differenz sie ist) aus diesen Formeln leicht gefunden. Weil nämlich die Differenz aus einigen Potenzen von x bestehen wird, werde die Summe irgendeines einzigen Termes gesucht und all diese Summen anschließend und gesammelt.

BEISPIEL 1

Es werde die Funktion gesucht, deren Differenz $= axx + bx + c$ sei

Die Summen der einzelnen Terme werden mit Hilfe der zuvor gefundenen Formeln gesucht; es wird sein

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

und

$$\Sigma bx = \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

und

$$\Sigma c = \frac{cx}{\omega}$$

Daher wird durch Sammeln dieser Summen sein

$$\Sigma(axx + bx + c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{a\omega - b}{2\omega}x^2 + \frac{a\omega^2 - 3b\omega + bc}{6\omega}x + C,$$

welche die gesuchte Funktion ist, deren Differenz $axx + bx$ ist.

BEISPIEL 2

Es werde die Funktion gesucht, deren Differenz $x^4 - 2\omega^2 xx + \omega^4$ ist.

Indem die Operation auf die gleiche Weise durchgeführt wird, wird man haben

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\omega}{3}x^3 - \frac{\omega^3}{30}x$$

und

$$-\Sigma 2\omega^2 x^2 = -\frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2 x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

und

$$+\Sigma\omega^4 = +\omega^3 x,$$

woher die gesuchte Funktion sein wird

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2 x^2 + \frac{19}{30}\omega^3 x + C.$$

Wenn nämlich hier anstelle von x $x+\omega$ gesetzt wird und von der resultierenden Größe diese gefundene subtrahiert wird, wird die vorgelegte Differenz $x^4 - 2\omega^2 x^2 + \omega^4$ zurückbleiben.

§29 Wenn wir die Summen, welche wir für die Potenzen von x gefunden haben, aufmerksamer anschauen, werden wir in den ersten, zweiten und dritten Termen bald freilich das Gesetz beobachten, nach welchem jene nach den einzelnen Potenzen fortschreiten; das Bildungsgesetz der übrigen Terme ist aber nicht so klar, dass es möglich ist, die Summe der Potenz x^n im Allgemeinen daher zu erschließen. Dennoch wird im Folgenden [§132 des zweiten Teils] gelehrt werden, dass gilt

$$\Sigma x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2\cdot 2}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot x^{n-3}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{6} &&\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} && x^{n-5}\\
&-\frac{3}{10} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-6)\omega^7}{2\cdot 3\cdots 8\cdot 9} && x^{n-7}\\
&+\frac{5}{6} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-8)\omega^9}{2\cdot 3\cdots 10\cdot 11} && x^{n-9}\\
&-\frac{691}{210} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-10)\omega^{11}}{2\cdot 3\cdots 12\cdot 13} && x^{n-11}\\
&+\frac{35}{2} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-12)\omega^{13}}{2\cdot 3\cdots 14\cdot 15} && x^{n-13}\\
&-\frac{3617}{30} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-14)\omega^{15}}{2\cdot 3\cdots 16\cdot 17} && x^{n-15}\\
&+\frac{43867}{42} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-16)\omega^{17}}{2\cdot 3\cdots 18\cdot 19} && x^{n-17}\\
&-\frac{1222277}{110} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-18)\omega^{19}}{2\cdot 3\cdots 20\cdot 21} && x^{n-19}\\
&+\frac{854513}{6} &&\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-20)\omega^{21}}{2\cdot 3\cdots 22\cdot 23} && x^{n-21}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-22)\omega^{23}}{2\cdot 3\cdots 24\cdot 25} x^{n-23} \\
&+ \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-24)\omega^{25}}{2\cdot 3\cdots 26\cdot 27} x^{n-25} \\
&- \frac{23749461029}{30} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-26)\omega^{27}}{2\cdot 3\cdots 28\cdot 29} x^{n-27} \\
&+ \frac{8615841276005}{462} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-28)\omega^{29}}{2\cdot 3\cdots 30\cdot 31} x^{n-29} \\
&\qquad \text{etc} + C,
\end{aligned}
$$

die wesentliche Bedeutung welcher Progression lediglich in den numerischen Koeffizienten gelegen ist; wie diese gebildet werden, ist hier noch nicht der Ort, wo es erklärt werden kann.

§30 Es ist aber klar, wenn n keine ganze positive Zahl ist, dass dieser Ausdruck der Summe ins Unendliche fortschreitet und auf diese Weise die Summe nicht in endlicher Form dargeboten werden kann. Im Übrigen ist es hier anzumerken, dass nicht alle geringeren Potenzen als die vorgelegte x^n auftauchen; es fehlen nämlich die Terme x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, etc., deren Koeffizienten natürlich $= 0$ sind, auch wenn der Koeffizient des zweiten Termes diesem Gesetz nicht folgt, sondern $= \frac{1}{2}$ ist. Es werden also von diesem Ausdruck mit Hilfe der Summe der Potenzen, deren Exponenten entweder negativ oder gebrochen sind, in unendlicher Form dargeboten werden können, einzig ausgenommen in dem Fall, in dem $n = -1$ ist, weil dann der Term $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ wegen $n - 1 = 0$ unendlich wird. So wird nach Setzen von $n = -2$ sein

$$
\begin{aligned}
\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\omega^3}{5x^5} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\omega^5}{7x^7} + \frac{3}{10}\cdot\frac{\omega^7}{9x^9} - \frac{5}{6}\cdot\frac{\omega^9}{11x^{11}} \\
+ \frac{691}{210}\cdot\frac{\omega^{11}}{13x^{13}} - \frac{35}{2}\cdot\frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3617}{30}\cdot\frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \text{etc}
\end{aligned}
$$

§31 Wenn also die vorgelegte Differenz irgendeine Potenz von x war, wird ihre Summe daher immer angegeben werden oder die Funktion, deren Differenz sie ist, dargeboten werden können. Wenn aber die vorgelegte Differenz eine andere Form hat, dass sie nicht in Potenzen von x als Teile aufgeteilt werden kann, dann kann die Summe sehr schwer und oftmals überhaupt nicht gefunden werden, wenn nicht zufällig klar wird, dass sie auch eine gewisser Funktion entsprungen ist. Dieses Grundes wegen wird es passend sein, die Differenzen mehrerer Funktionen ausfindig zu machen und sie sittsam aufzuzeichnen, dass, wann immer, wenn eine Differenz von dieser Art vorgelegt wird, ihre Summe oder die Funktion, aus welcher sie entstanden ist, sofort dargeboten werden kann. Dennoch wird indes die Methode des Unendlichen mehrere Regeln an die Hand geben, mit deren Hilfe das Finden der Reihen wunderbar erleichtert werden wird.

§32 Oft wird die Summe aber leichter gefunden, wenn die vorgelegte Differenz aus einfachen Faktoren besteht, die eine arithmetische Progression festlegen, deren Differenz die Größe ω selbst ist. So, wenn die Funktion $(x+\omega)(x+2\omega)$ vorgelegt war, deren Differenz gesucht werde, weil nach Setzen von $x+\omega$ anstelle von x diese Funktion in $(x+2\omega)(x+3\omega)$ übergeht, wenn ihre Differenz $2\omega(x+2\omega)$ vorgelegt wird, wird ihre Summe $(x+\omega)(x+2\omega)$ sein; daher wird also sein

$$\Sigma(x+2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega).$$

Auf die gleiche Weise, wenn die Funktion $(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$ vorgelegt wird, weil ihre Differenz $2\omega(x+(n+1)\omega)$ ist, wird sein

$$\Sigma(x+(n+1)\omega == \frac{1}{2\omega}(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

und

$$\Sigma(x+n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)$$

§33 Wenn die Funktion aus mehreren Faktoren besteht, dass ist

$$y = (x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega),$$

weil dann auch ist

$$y^I = (x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega),$$

wird sein

$$\Delta y = 3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

und deshalb

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega) = \frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega).$$

Auf die gleiche Weise wird aufgefunden werden, dass ist

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)$$

$$=\frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega),$$

woher das Gesetz, die Summen zu finden, wenn die Differenz aus mehreren Faktoren von dieser Art besteht, von selbst klar zutage tritt. Obgleich aber diese Differenzen ganz rationale Funktionen sind, werden deren Summen auf diese Weise leichter aufgefunden als durch die vorhergehende Methode.

§34 Daher wird auch der Weg klar, um Summen von Differenzen von Brüchen zu finden. Es sei nämlich dieser Bruch vorgelegt

$$y=\frac{1}{x+n\omega};$$

weil sein wird

$$y^I=\frac{1}{x+(n+1)\omega},$$

wird auch sein

$$\Delta y=\frac{1}{x+(n+1)\omega}-\frac{1}{x+n\omega}=\frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

und deshalb

$$\Sigma=\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)};$$

Es sei weiter

$$y=\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)};$$

wegen

$$y^I=\frac{1}{(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$

wird sein

$$\Delta y=\frac{-2\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}.$$

Daher wird also werden

$$\Sigma\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}=\frac{-1}{2\omega}\cdot\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}.$$

Auf die gleiche Weise wird weiter sein

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)(x+(n+3)\omega)}$$
$$= \frac{-1}{3\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}.$$

§35 Diese Summationsweise ist sittsam festzuhalten, weil die Summen von Differenzen dieser Art durch die vorhergehende Methode nicht gefunden werden können. Wann immer daher aber die Differenz darüber hinaus einen Zähler hat oder die Faktoren des Nenners nicht in einer arithmetischen Progression fortschreiten, dann ist die sicherste Art die Summen ausfindig zu machen, dass die vorgelegte Differenz in ihre einfachen Faktoren aufgelöst wird; auch wenn die einzelnen von diesen nicht summiert werden können, kann dennoch, indem je zwei verbunden werden, so oft die Summe gefunden werden, wie es sich freilich machen lässt; es wird nämlich nur zu ermitteln sein, ob die Summe mit Hilfe dieser Formel gefunden werden kann

$$\Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega};$$

auch wenn keine der beiden dieser Summen per se dargeboten werden kann, wird dennoch deren Differenz erkannt.

§36 In diesen Fällen geht also die Aufgabe auf die Auflösung eines Bruches in seine einfachen Brüche zurück, welche im oberen Bruch ausführlich gezeigt worden ist. Wie also mit ihrer Hilfe die Summen gefunden werden können, werden wir an einigen Beispielen lehren.

Beispiel 1

Es werde die Summe gesucht, deren Differenz $\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}$ ist.

Es werde diese vorgelegte Differenz in ihre einfachen Brüche aufgelöst, die sein werden

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{x+2\omega}.$$

Weil nun aus der oberen Formel gilt

$$\Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega},$$

wird sein

$$\Sigma\frac{1}{x} = \Sigma\frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}\ .$$

Daher wird die gesuchte Summe diese sein

$$\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x} + \frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega} = \frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega} - \frac{1}{\omega x};$$

aber es ist

$$\Sigma\frac{1}{x+\omega} = \Sigma\frac{1}{x+2\omega} - \frac{1}{x+\omega};$$

daher wird die gesuchte Summe sein

$$-\frac{1}{\omega x} - \frac{2}{\omega(x+\omega)} = \frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}\ .$$

Beispiel 2

Es werde Summe gesucht, deren Differenz $\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}$ ist.

Nachdem diese Differenz $= z$ gesetzt worden ist, wird $z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3\omega}$ sein und daher

$$\Sigma z = \Sigma\frac{1}{x} - \Sigma\frac{1}{x+3\omega} = \Sigma\frac{1}{x+\omega} - \Sigma\frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x}$$

$$= \Sigma\frac{1}{x+2\omega} - \Sigma\frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\omega} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x+2\omega},$$

welche die gesuchte Summe ist. Sooft sich also auf diese Weise die Summationszeichen Σ schließlich aufheben, sooft wird die Summe der vorgelegten Differenz dargeboten werden können; wenn aber diese Aufhebung nicht gelingt, ist dies ein Zeichen, dass die Summe nicht gefunden werden kann.